Σχετικά με έναν ολοκληρωτικό τελεστή.

Επαμεινώνδας Α. Διαμαντόπουλος

Περίληψη

Θεωρούμε τον ολοκληρωτικό τελεστή

$$\mathcal{I}(f)(z) = \frac{1}{[S_z]} \int_{S_z} K(\zeta, z) f(\zeta)\, d\zeta,$$

όπου $[S_z] = (x_2 + \lambda_2 z) - (x_1 + \lambda_1 z)$, $|x_1 \pm \lambda_i| \leq 1$, $i = 1, 2$, και

$$K(\zeta, z) = \frac{1}{p(z)\zeta + q(z)},$$

όπου p, q, μερόμορφές συναρτήσεις στο μοναδιαίο δίσκο. Δείχνουμε πως ο τελεστής $\mathcal{I}$ μπορεί να γραφεί σε όρους σταθμισμένων τελεστών σύνθεσης. Χρησιμοποιώντας την έκφραση αυτή εννοποιούμε παλαιότερα αποτελέσματα που αφορούν τη δράση ειδικών περιπτώσεων του τελεστή αυτού σε χώρους αναλυτικών συναρτήσεων τύπου Hardy, Bergman και Dirichlet .

Σχετικά με έναν ολοκληρωτικό τελεστή.

Επαμεινώνδας Α. Διαμαντόπουλος

7 Ιουνίου 2012

Θεωρούμε τον ολοκληρωτικό τελεστή

$$\mathcal{I}(f)(z) = \frac{1}{[S_z]} \int_{S_z} \frac{f(\zeta)}{p(z)\zeta + q(z)}\, d\zeta, \tag{1}$$

όπου p και q είναι μερόμορφες συναρτήσεις στον μοναδιαίο μιγαδικό δίσκο, x_i, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $|x_i \pm \lambda_i| \leq 1$, και $[S_z] = (x_2 + \lambda_2 z) - (x_1 + \lambda_1 z)$, $z \in \mathbb{D}$. Τελεστές αυτού του τύπου είναι ο ολοκληρωτικός τελεστής του Cesàro

$$\mathcal{C}(f)(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \frac{f(\zeta)}{1-\zeta}\, d\zeta,$$

και ο ολοκληρωτικός τελεστής του Hilbert

$$\mathcal{H}(f)(z) = \int_0^1 \frac{f(\zeta)}{1-\zeta z}\, d\zeta.$$

Στην παρούσα εργασία μελετούμε τον τελεστή $\mathcal{I}$ στους σταθμισμένους χώρους Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$, $0 < a < 2$, οι οποίοι αποτελούνται από τις αναλυτικές συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} = |f(0)|^2 + \iint_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1-|z|)^\alpha\, dm(z).$$

Η αλυσίδα των χωρών αυτών περιλαμβάνει το χώρο Hardy H^2, για $\alpha = 1$, και τον κλασσικό χώρο Dirichlet $\mathcal{D}$, για $\alpha = 0$.

Θα αποδείξουμε μία ικανή συνθήκη από την οποία θα συνάγεται πως ο τελεστής $\mathcal{I}$ είναι φραγμένος στους χώρους $\mathcal{D}_\alpha$, $0 < a < 2$.

Η απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος γίνεται με χρήση ενός κατάλληλου μετασχηματισμού με τον οποίο ο τελεστής $\mathcal{I}$ γράφεται σε όρους σταθμισμένων τελεστών σύνθεσης. Η ειδικότερη περίπτωση για απλές γραμμικές συναρτήσεις p και q, παρουσιάστηκε παλαιότερα από τον συγγραφέα στην εργασία [Dia2]. Επιπλέον, στους σταθμισμένους χώρους Dirichlet οι τελεστές Cesàro και Hilbert μελετήθηκαν στις εργασίες [Ga], [Li], κάτι που σημαίνει πως η παρούσα μπορεί να θεωρηθεί ως εννοποίηση των εργασιών αυτών. Τέλος, ειδικές περιπτώσεις του τελεστή $\mathcal{I}$ έχουν μελετηθεί στο παρελθόν σε άλλους χώρους αναλυτικών συναρτήσεων ([Sis2], [Sis4], [DS], [Dia1]).

1 Εισαγωγή.

Στη συνέχεια, με το σύμβολο $\mathcal{X}$ θα συμβολίζουμε ένα χώρο Banach αναλυτικών συναρτήσεων στον οποίο, για κάθε $f \in \mathcal{X}$, και κάθε $z \in \mathbb{D}$, υπάρχει μία σταθερά $c = c(\mathcal{X}) < 1$, τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)^c}\|f\|_X. \tag{2}$$

Παραδείγματα τέτοιων χώρων είναι ο χώρος Hardy H^p, $p > 1$ ($c = 1/p$, [Du]), ο χώρος Bergman A^p, $p > 2$ ($c = 2/p$, [Vu]) και ο σταθμισμένος χώρος Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$, $0 < a < 2$, ($c = \alpha/2$, [Ga]).

Λήμμα 1.1. *Έστω x_i, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $|x_i \pm \lambda_i| \leq 1$, $i = 1, 2$ και p, q μερόμορφες συναρτήσεις στο μοναδιαίο δίσκο. Αν για κάθε $z \in \mathbb{D}$,*

$$\Re\left[\frac{p(z)(x_2+\lambda_2 z)+q(z)}{p(z)(x_1+\lambda_1 z)+q(z)}\right]^{1/2} > 0, \tag{3}$$

τότε ο τελεστής $\mathcal{I}$ είναι καλά ορισμένος στο χώρο $\mathcal{X}$.

Απόδειξη. Πρώτα υποθέτουμε πως οι συναρτήσεις p και q είναι αναλυτικές στο

$\mathbb{D}$. Έστω $r_z(t) = [S_z]t + (x_1 + \lambda_1 z)$, $0 < t < 1$, $z \in \mathbb{D}$. Για $f \in X$ και $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{I}(f)(z)| &= \left| \frac{1}{[S_z]} \int_{S_z} \frac{f(\zeta)}{p(z)\zeta + q(z)} \, d\zeta \right| \\
&= \left| \int_0^1 \frac{f(r_z(t))}{p(z)r_z(t) + q(z)} \, dt \right| \\
&\leq \int_0^1 \frac{|f(r_z(t))|}{|p(z)r_z(t) + q(z)|} \, dt \\
&\leq \max_{t \in [0,1]} \frac{C}{|p(z)r_z(t) + q(z)|} \int_0^1 \frac{1}{(1 - |r_z(t)|)^c} \, dt \|f\|_X.
\end{aligned}$$

Ένας απλός υπολογισμός δείχνει πως η υπόθεση (3), με ύψωση στο τετράγωνο, πολλαπλασισμό με -1, πρόσθεση του +1 και μία αντιστροφή, ισοδυναμεί με τη συνθήκη πως η συνάρτηση $|p(z)r_z(t) + q(z)|^{-1}$ είναι φραγμένη ως μιγαδική συνάρτηση της μεταβλητής t, για κάθε $z \in \mathbb{D}$, δηλαδή

$$\max_{t \in [0,1]} \frac{1}{|p(z)r_z(t) + q(z)|} < \infty.$$

Επιπλέον, για κάθε $z \in \mathbb{D}$, και $0 < t < 1$,

$$|r_z(t)| \leq \min\{[S_{\pm 1}]t + (x_1 - \lambda_1), [S_{\pm 1}]t + (x_1 + \lambda_1)\},$$

δηλαδή,

$$1 - |r_z(t)| \geq \max\{1 - (x_1 - \lambda_1) - [S_{\pm 1}]t, 1 - (x_1 + \lambda_1) - [S_{\pm 1}]t\},$$

από το οποίο συνάγουμε

$$\int_0^1 \frac{1}{(1 - |r_z(t)|)^c} \, dt \leq \frac{1}{[1 - (x_1 \pm \lambda_1)]^c} \int_0^1 \frac{1}{\left[1 - \frac{S_{\pm 1}}{1 - (x_1 \pm \lambda_1)} t\right]^c} \, dt.$$

Επιπλέον, καθώς $S_{\pm 1} \leq 1 - (x_1 \pm \lambda_1)$, και $c < 1$, το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο, δηλαδή ο τελεστής $\mathcal{I}$ είναι καλά ορισμένος για κάθε $z \in \mathbb{D}$ και κάθε $f \in \mathcal{X}$. Τέλος, προσέχουμε πως η υπόθεση της αναλυτικότητας των p ανδ q μπορεί να χαλαρώσει, καθώς στην περίπτωση που μία ή και οι δύο από τις συναρτήσεις αυτές είναι μερόμορφές τότε αρκεί ένας πολλαπλασιασμός των δύο μερών του κλάσματος $f(\zeta)/(p(z)\zeta + q(z))$, με κατάλληλο πολυώνυμο για να συνεχίσουν τα παραπάνω επιχειρήματα να ισχύουν. $\square$

2 Ειδικές περιπτώσεις του τελεστή $\mathcal{I}$

2.1 Ο τελεστής $\mathcal{I}$ ως γενίκευση παλαιότερων ειδικών περιπτώσεων.

Εκτός από τους ολοκληρωτικούς τελεστές του Cesàro και του Hilbert, ο τελεστής $\mathcal{I}$ είναι πρωτότυπο για αρκετούς ακόμα ολοκληρωτικούς τελεστές που έχουν μελετηθεί στο παρελθόν, όπως ο τελεστής $\mathcal{A}$, που είναι ο H^2 συζυγής του τελεστή του Cesàro , ή ο τελεστής $\mathcal{H}_0$, ο οποίος παράγεται από τον αποκομμένο πίνακα του Hilbert. Στον πίνακα 1, παρουσιάζονται οι επιλογές των x_i, λ_i, $i = 1, 2$, p και q που αντιστοιχούν σε κάθε μία τέτοια περίπτωση, μαζί με κάποια αντιπροσωπευτικές εργασίες στις οποίες οι τελεστές αυτοί έχουν μελετηθεί.

Πίνακας 1: Ειδικές περιπτώσεις του τελεστή $\mathcal{I}$.

Τελεστής	x_1	x_2	λ_1	λ_2	$p(z)$	$q(z)$	Άρθρα
$\mathcal{C}(f)(z) = \frac{1}{z}\int_0^z \frac{f(\zeta)}{1-\zeta}\,d\zeta$	0	0	0	1	-1	1	[Ga], [Sis4]
$\mathcal{A}(f)(z) = \frac{1}{z-1}\int_1^z f(\zeta)\,d\zeta$	1	0	0	1	0	1	[Sis2], [Sis3]
$\mathcal{J}(f)(z) = \frac{1}{z-1}\int_1^z \frac{f(\zeta)}{-1-\zeta}\,d\zeta$	1	0	0	1	-1	-1	[Sis1]
$\mathcal{H}(f)(z) = \int_0^1 \frac{f(\zeta)}{1-\zeta z}\,d\zeta$	0	1	0	0	$-z$	1	[DS], [Dia1]
$\mathcal{H}_0(f)(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{f(\zeta)}{1-\zeta z}\,d\zeta$	-1	1	0	0	$-z$	1	[Dia2]

2.2 Ο $\mathcal{I}$ ως τελεστής που παράγεται από τη δράση πίνακα.

Οι περισσότεροι από τους τελεστές που αποτέλεσαν το κίνητρο για την εργασία αυτή είναι τελεστές που παράγονται από τη δράση συγκεκριμένων πινάκων στους συντελεστές αναλυτικών συναρτήσεων. Αναμενόμενα μπορούμε να εντοπίσουμε μία μεγαλύτερη οικογένεια τελεστών του είδους αυτού. Συγκεκριμένα,

έστω

$$M_1 = \begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & c_{0,2} & \cdots \\ c_{1,0} & c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots \\ c_{2,0} & c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

όπου

$$c_{n,k} = (-1)^n \frac{p_0^n}{q_0^{n+1}} \frac{x_2^{n+k+1} - x_1^{n+k+1}}{(x_2 - x_1)(n+k+1)}, \quad n, k \geq 0,$$

$-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, p_0, $q_0 \in \mathbb{R}$, $(q_0 \pm p_0 x_2)(q_0 \pm p_0 x_1) > 0$, και

$$M_2 = \begin{pmatrix} d_{0,0} & 0 & 0 & \cdots \\ d_{1,0} & d_{1,1} & 0 & \cdots \\ d_{2,0} & d_{2,1} & d_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

όπου,

$$d_{n,k} = \begin{cases} 0, & 0 \leq n < k, \\ \frac{(-1)^{n-k}}{q_0} \left(\frac{p_0}{q_0}\right)^{n-k} \frac{\lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(n+1)}, & n \geq k, \end{cases},$$

p_0, $q_0 \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq 1$ και $(q_0 \pm p_0 \lambda_1)(q_0 \pm p_0 \lambda_2) > 0$. Για $p_0 = -q_0$, οι πίνακες της οικογένειας M_1 είναι πίνακες Hankel ενώ μπορούν να θεωρηθούν ως γενίκευση του πίνακα του Hilbert, η περίπτωση του οποίου προκύπτει για την επιλογή $p_0 = -1$, $q_0 = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει πως ο αποκομμένος πίνακας του Hilbert εμφανίζεται με την επιλογή $p_0 = -1$, $q_0 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Από την άλλη μεριά, οι πίνακες της οικογένειας M_2 είναι κάτω τριγωνικοί πίνακες οι οποίοι μπορεί να θεωρηθούν ως γενίκευση του πίνακα Cesàro ο οποίος προκύπτει για $p_0 = -1$, $q_0 = 1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$.

Έστω, τώρα $\mathcal{X}$ χώρος για τον οποίο ισχύει η υπόθεση (2). Για κάθε αναλυτική συνάρτηση $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{X}$, έστω

$$\mathcal{M}_1 : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \to \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_{n,k} z^n,$$

και

$$\mathcal{M}_2 : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \to \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k d_{n,k} z^n.$$

Επιπλέον, υποθέτουμε πως για κάθε $f(z) = \sum_{n\geq} a_n z^n$, τα παραπάνω άπειρα αθροίσματα συγκλίνουν και ορίζουν αναλυτικές συναρτήσεις για κάθε $f \in \mathcal{X}$. Πράγματι, αυτό μπορεί να επαληθευτεί για τους χώρους Hardy , Bergman και τους σταθμισμένους χώρους Dirichlet . Τώρα υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1(f)(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(-1)^n \frac{p_0^n}{q_0^{n+1}} \frac{x_2^{n+k+1} - x_1^{n+k+1}}{(x_2 - x_1)(n+k+1)} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(-1)^n \frac{p_0^n}{q_0^{n+1}} \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} \zeta^{n+k}\, d\zeta\right) z^n \\
&= \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(\zeta)}{p_0 z\zeta + q_0}\, d\zeta,
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2(f)(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(-1)^{n-k}}{q_0}\left(\frac{p_0}{q_0}\right)^{n-k} \frac{\lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(n+1)} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(-1)^{n-k}}{q_0}\left(\frac{p_0}{q_0}\right)^{n-k} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\int_{\lambda_1 z}^{\lambda_2 z} \zeta^n\, d\zeta\right) z^n \\
&= \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)z}\int_{\lambda_1 z}^{\lambda_2 z} \frac{f(\zeta)}{p_0\zeta + q_0}\, d\zeta.
\end{aligned}$$

Από τις υποθέσεις και το Λήμμα 1.1 συνάγουμε πως οι τελεστές $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ είναι καλά ορισμένοι στο χώρο $\mathcal{X}$. Τέλος, καθώς από τις παραπάνω συνθήκες, η μορφή των τελεστών $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ ως σειρά συγκλίνει, η αλλαγή του ολοκληρώματος με τη σειρά είναι εφικτή και καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα πως οι τελεστές αυτοί αναγνωρίζονται ως ειδικές περιπτώσεις του $\mathcal{I}$.

3 Ο τελεστής $\mathcal{I}$ σε όρους σταθμισμένων τελεστών σύνθεσης.

Υπενθυμίζουμε πως ο $\mathcal{X}$ είναι ένας χώρος αναλυτικών συναρτήσεων για τον οποίον η υπόθεση (2) ισχύει. Για κάθε $(t, z) \in (0, 1) \times \mathbb{D}$, ορίζουμε

$$w(t, z) = \frac{1}{(x_2 + \lambda_2 z - t[S_z])p(z) + q(z)},$$

και

$$\gamma(t,z) = \frac{(x_1+\lambda_1 z)(x_2+\lambda_2 z)p(z) + (x_1+\lambda_1 z + t[S_z])q(z)}{(x_2+\lambda_2 z - t[S_z])p(z) + q(z)}.$$

Πρόταση 3.1. *Έστω λ_i, $x_i \in [-1,1]$, $i=1,2$, $|x_i \pm \lambda_i| \leq 1$, $i=1,2$, p, q μερόμορφες στο $\mathbb{D}$, τέτοια ώστε*

$$\Re\left[\frac{p(z)(x_2+\lambda_2 z)+q(z)}{p(z)(x_1+\lambda_1 z)+q(z)}\right]^{1/2} > 0.$$

και για κάθε $(t,z) \in (0,1)\times\mathbb{D}$,

$$|(x_1+\lambda_1 z)(x_2+\lambda_2 z)p(z)+(x_1+\lambda_1 z+t[S_z])q(z)| < |(x_2+\lambda_2 z-t[S_z])p(z)+q(z)|.$$

Τότε, για κάθε $f \in \mathcal{X}$,

$$\mathcal{I}(f)(z) = \int_0^1 T_t(f)(z)\,dt,$$

όπου

$$T_t(f)(z) = w(t,z)f(\gamma(t,z)).$$

Απόδειξη. Από την πρώτη υπόθεση και το Λήμμα 1.1 συνάγουμε πως ο τελεστής $\mathcal{I}$ είναι καλά ορισμένος στο χώρο $\mathcal{X}$, ενώ από τη δεύτερη υπόθεση, η συνάρτηση γ είναι μία καλά ορισμένη απεικόνιση του μοναδιαίου δίσκου. Εύκολα επαληθεύουμε πως $\gamma(0,z) = x_1+\lambda_1 z$, και $\gamma(1,z) = x_2+\lambda_2 z$. Στο ολοκλήρωμα (1) εφαρμόζουμε την αλλαγή μεταβλητής $\zeta \to \gamma(t,z)$, και υπολογίζουμε,

$$\mathcal{I}(f)(z) = \frac{1}{[S_z]}\int_0^1 \frac{f(\gamma(t,z))}{p(z)\gamma(t,z)+q(z)}\frac{\partial\gamma(t,z)}{\partial t}\,dt.$$

Είναι

$$p(z)\gamma(t,z)+q(z) = \frac{[p(z)(x_1+\lambda_1 z)+q(z)][p(z)(x_2+\lambda_2 z)+q(z)]}{p(z)(x_2+\lambda_2 z-t[S_z])+q(z)},$$

και

$$\frac{\partial\gamma(t,z)}{\partial t} = \frac{[S_z][p(z)(x_1+\lambda_1 z)+q(z)][p(z)(x_2+\lambda_2 z)+q(z)]}{[p(z)(x_2+\lambda_2 z-t[S_z])+q(z)]^2}.$$

Ορισμένες απλές πράξεις μας δίνουν

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(f)(z) &= \int_0^1 \frac{f(\gamma(t,z))}{p(z)(x_2+\lambda_2 z - t[S_z]) + q(z)}\,dt \\ &= \int_0^1 w(t,z) f(\gamma(t,z))\,dt,\end{aligned}$$

που είναι το επιθυμητό αποτέλεσμα. □

4 Εκτίμηση της νόρμας του τελεστή $\mathcal{I}$ στους σταθμισμένους χώρους Dirichlet.

Στην παράγραφο αυτή βρίσκουμε την επιθυμητή εκτίμηση. Επικεντρωνόμαστε στην περίπτωση $\mathcal{X} = \mathcal{D}_\alpha$, $0 < \alpha < 2$. Υπενθυμίζουμε την ανισότητα Schwarz's-Pick,

$$\frac{1-|z|}{1-|\gamma(t,z)|} \le \frac{1}{|\partial_z \gamma(t,z)|}, \quad (t,z) \in (0,1)\times\mathbb{D},$$

η οποία θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω.

Λήμμα 4.1. *Έστω $f \in \mathcal{D}_\alpha$, $0 < \alpha < 2$, και για κάθε $(t,z) \in (0,1)\times\mathbb{D}$,*

$$|(x_1+\lambda_1 z)(x_2+\lambda_2 z)p(z) + (x_1+\lambda_1 z + t[S_z])q(z)| < |(x_2+\lambda_2 z - t[S_z])p(z) + q(z)|.$$

Τότε για $0 < \alpha < 2$,

$$\|T_t(f)\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \le C\left[\int_{\mathbb{D}} \frac{|\partial_z w(t,z)|^2}{|\partial_z \gamma(t,z)|^\alpha}\,dm(z) + \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|w(t,z)|^2}{|\partial_z\gamma(t,z)|^\alpha}\right]\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha},$$

όπου C είναι κατάλληλη σταθερά ανεξάρτητη από το t.

Απόδειξη. Για την απόδειξη συμβολίζουμε $w_t(z) = w(t,z)$ και $\gamma_t(z) = \gamma(t,z)$. Έστω $f \in \mathcal{D}_\alpha$, $0 < \alpha < 2$. Είναι

$$\begin{aligned}\|T_t(f)\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} &= |T_t(f)(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |(w_t(z) f(\gamma_t(z)))'|^2 (1-|z|)^\alpha\,dm(z) \\ &\le |T_t(f)(0)|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |w_t(z)'|^2 |f(\gamma(t,z))|^2 (1-|z|)^\alpha\,dm(z) \\ &\qquad + 2\int_{\mathbb{D}} |w(t,z)|^2 |(f(\gamma_t(z)))'|^2 (1-|z|)^\alpha\,dm(z) \\ &= |T_t(f)(0)|^2 + 2I_1 + 2I_2.\end{aligned}$$

Τώρα,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{D}} |w_t'(z)|^2 |f(\gamma_t(z))|^2 (1-|z|)^\alpha \, dm(z) \\
&\leq C \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^\alpha |w_t'(z)|^2}{(1-|\gamma_t(z)|)^\alpha} \, dm(z) \|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \\
&\leq C \int_{\mathbb{D}} \frac{|w_t'(z)|^2}{|\gamma_t'(z)|^\alpha} \, dm(z) \|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha},
\end{aligned}
$$

ενώ για το ολοκλήρωμα I_2 βρίσκουμε,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\mathbb{D}} |w_t(z)|^2 |f'(\gamma_t(z))|^2 |\gamma_t'(z)|^2 (1-|z|)^\alpha \, dm(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} |w_t(z)|^2 |f'(\gamma_t(z))|^2 |\gamma_t'(z)|^2 (1-|\gamma_t(z)|)^\alpha \frac{(1-|z|)^\alpha}{(1-|\gamma_t(z)|)^\alpha} \, dm(z) \\
&\leq \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|w_t(z)|^2}{|\gamma_t'(z)|^\alpha} \int_{\mathbb{D}} |f'(\gamma_t(z))|^2 |\gamma_t'(z)|^2 (1-|\gamma_t(z)|)^\alpha \, dm(z) \\
&\leq \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|w_t(z)|^2}{|\gamma_t'(z)|^\alpha} \|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}.
\end{aligned}
$$

Πίνακας 2: Αναγκαίοι υπολογισμοί σχετικά με τους τελεστές που αποτέλεσαν το κίνητρο για την εργασία αυτή.

Τελεστής	$\left[\frac{p(z)(x_2+\lambda_2 z)+q(z)}{p(z)(x_1+\lambda_1 z)+q(z)}\right]^{1/2}$	$\gamma(t,z)$
$\mathcal{C}(f)(z) = \frac{1}{z}\int_0^z \frac{f(\zeta)}{1-\zeta}\, d\zeta$	$\sqrt{1-z}$	$\frac{tz}{(t-1)z+1}$
$\mathcal{A}(f)(z) = \frac{1}{z-1}\int_1^z f(\zeta)\, d\zeta$	1	$tz+1-t$
$\mathcal{J}(f)(z) = \frac{1}{z-1}\int_1^z \frac{f(\zeta)}{-1-\zeta}\, d\zeta$	$\sqrt{\frac{1+z}{2}}$	$\frac{(-t-1)z+t-1}{(t-1)z-t-1}$
$\mathcal{H}(f)(z) = \int_0^1 \frac{f(\zeta)}{1-\zeta z}\, d\zeta$	$\sqrt{1-z}$	$\frac{t}{(t-1)z+1}$
$\mathcal{H}_0(f)(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{f(\zeta)}{1-\zeta z}\, d\zeta$	$\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$	$\frac{2z+4t-2}{(4t-2)z+2}$

Τελικά,

$$|T_t(f)(0)|^2 = |w_t(0)|^2|f(\gamma_t(0))|^2 \leq \frac{C|w_t(0)|^2}{(1-|\gamma_t(0)|)^\alpha}\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}$$
$$\leq \frac{C|w_t(0)|^2}{|\gamma_t'(0)|^\alpha}\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \leq C\sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{|w_t(z)|^2}{|\gamma_t'(z)|^\alpha}\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha},$$

από το οποίο παίρνουμε και το επιθυμητό αποτέλεσμα. □

Από το τελευταίο Λήμμα, την Πρόταση 3.1 και την ανισότητα του Minkowski εύκολα αποδεικνύουμε το

Θεώρημα 4.1. *Έστω λ_i, $x_i \in [-1,1]$, $i=1,2$, $|x_i \pm \lambda_i| \leq 1$, $i=1,2$, p, $q \in H(\mathbb{D})$, τέτοια ώστε*

$$\Re\left[\frac{p(z)(x_2+\lambda_2 z)+q(z)}{p(z)(x_1+\lambda_1 z)+q(z)}\right]^{1/2} > 0,$$

και για κάθε $(t,z) \in (0,1)\times\mathbb{D}$,

$$\frac{|(x_1+\lambda_1 z)(x_2+\lambda_2 z)p(z)+(x_1+\lambda_1 z+t[S_z])q(z)|}{|(x_2+\lambda_2 z-t[S_z])p(z)+q(z)|} < 1. \tag{4}$$

Τότε, για κάθε $f \in \mathcal{D}_\alpha$, $0<\alpha<2$,

$$\|\mathcal{I}(f)\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq C\int_0^1\left[\int_{\mathbb{D}}\frac{|\partial_z w(t,z)|^2}{|\partial_z\gamma(t,z)|^\alpha}\,dm(z)+\sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{|w(t,z)|^2}{|\partial_z\gamma(t,z)|^\alpha}\right]^{1/2}dt\|f\|_{\mathcal{D}_\alpha}.$$

Θα εφαρμόσουμε το παραπάνω θεώρημα για να δείξουμε πως οι τελεστές του Πίνακα 2 είναι φραγμένοι στο σταθμισμένο χώρο Dirichlet.

Πόρισμα 4.1. *Οι τελεστές $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{H}$ και $\mathcal{H}_0$ είναι φραγμένοι στο σταθμισμένο χώρο Dirichlet, $\mathcal{D}_\alpha$, $0<\alpha<2$.*

Απόδειξη. Εύκολα επαληθεύουμε πως οι παραπάνω τελεστές είναι καλά ορισμένοι στους χώρους αυτούς (Πίνακας 2). Χρησιμοποιώντας κλασσικές τεχνικές δείχνουμε πως τα επιμέρους αντίστοιχα ολοκληρώματα είναι φραγμένα για κάθε έναν από τους τελεστές. Το αποτέλεσμα προκύπτει από το Θεώρημα 4.1. □

Αναφορές

[Dia1] E. Diamantopoulos, *Hilbert matrix on Bergman spaces*, Illinois J. Math., 48 (3) (2004) 1067–1078.

[Dia2] E. A. Diamantopoulos, *Norm estimates for a particular integral operator*, J. Integral Equations Appl., 22 (1) (2010), 39–56.

[DS] E. Diamantopoulos and A. G. Siskakis, *Composition operators and the Hilbert matrix*, Studia Math., 140 (2) (2000), 191–198.

[Du] P. L. Duren, *Theory of H^p spaces*, Academic Press, New York and London 1970.

[Ga] P. Galanopoulos, *The Cesàro operator on Dirichlet spaces*, Acta Sci. Math (Szeged), 67, (2001), 411–420.

[HKZ] H. Hedenmalm, B. Korenblum and K. Zhu *Theory of Bergman spaces.*, New York: Springer-Verlag, 2000.

[Li] S. Li, *Generalized Hilbert operator on the Dirichlet-type space*, Appl. Math. Comp. 214 (2009) 304•-309.

[Po] S. C. Power, *Hankel operators on Hilbert spaces*, Bull. London Math. Soc., 12 (1980), 422–442.

[Ru] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, New York 1966.

[Sis1] A. G. Siskakis, *Weighted composition semigroups onHardy spaces*, Linear Algebra Appl., 84 (1986), 359–371.

[Sis2] A. G. Siskakis, *Composition semigroups and the Cesàro operator on H^p*, J. London Math. Soc., (2)36 (1987), 153–164.

[Sis3] A. G. Siskakis, *Semigroups of composition operators in Bergman spaces*, Bull. Austr. Math. Soc., 35 (1987), 397–406.

[Sis4] A. G. Siskakis, *On the Bergman space norm of the Cesàro operator*, Arch. Math., 67 (1996), 312–318.

[Vu] D. Vukotić, *A sharp estimate for A^p_α functions in $\mathbb{C}^n$*, Proc. Amer. Soc., 117, 3 (1993), 753–756.